Chapitre 16 – Système de deux équations à deux inconnues

I Définition

Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y est de la forme

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' désignent des nombres donnés.

Une solution d'un tel système est un couple $(x\ ;\ y)$ pour lequel les **deux** équations sont vérifiées simultanément.

Résoudre un système, c'est trouver tous ses couples solutions.

Exemple :

$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues x et y.

Pour $x = 1$ et $y = 3$:
$x + y = 1 + 3 = 4$ donc le couple $(1\ ;\ 3)$ vérifie la première équation ;
$2x - y = 2\times1 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc le couple $(1\ ;\ 3)$ ne vérifie pas la deuxième équation.
Donc le couple $(1\ ;\ 3)$ n'est pas solution du système.

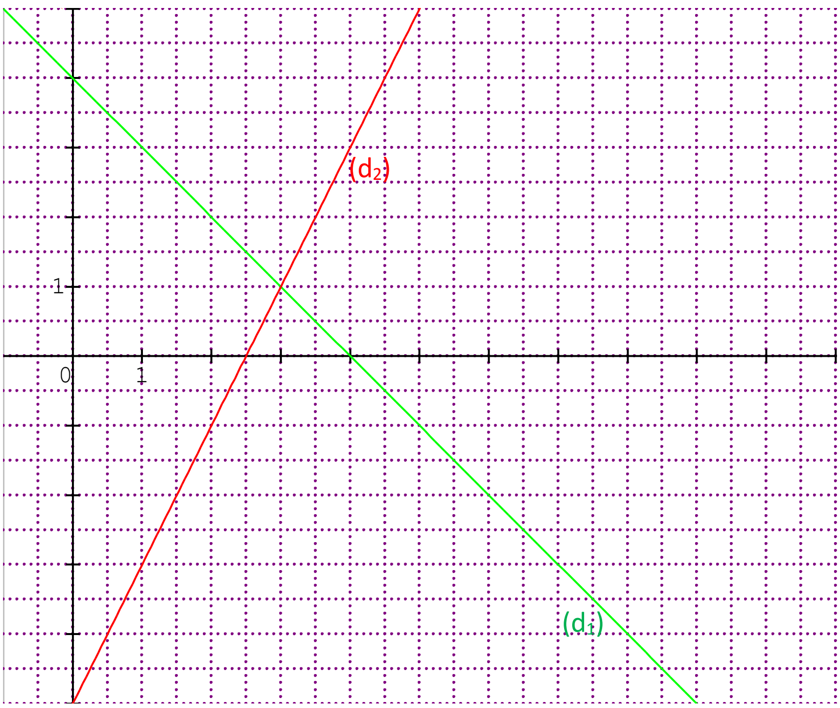
Pour $x = 3$ et $y = 1$:
$x + y = 3 + 1 = 4$ donc le couple $(3\ ;\ 1)$ vérifie la première équation ;
$2x - y = 2\times3 - 1 = 6 - 1 = 5$ donc le couple $(3\ ;\ 1)$ vérifie la deuxième équation.
Donc le couple $(3\ ;\ 1)$ est solution du système.

II Interprétation graphique

(S) est le système $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

La première équation s'écrit aussi : $y = 4 - x$.
La deuxième équation s'écrit aussi : $y = 2x - 5$.

Résoudre le système (S) revient à trouver, dans un repère, les coordonnées du point d'intersection des droites (d_1) et (d_2), qui représentent graphiquement les fonctions affines $x \mapsto 4 - x$ et $x \mapsto 2x - 5$.



RESOLUTION PAR SUBSTITUTION :
On utilise de préférence cette méthode lorsque l'une des inconnues a pour coefficient « 1 » ou « -1 ».

Exemple :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} + 2y = -4 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

1. On exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre dans une des équations :

$$\begin{cases} x = -4 - 2\text{y} \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

2. On remplace l'inconnue dans l'autre équation. Elle devient une équation du premier degré à une seule inconnue qu'on va résoudre :

$$\begin{cases} x = -4 - 2y \\ 3\boldsymbol{(-4 - 2y)} - 2y = 12 \end{cases}$$

On développe la nouvelle équation :

$$\begin{cases} x = -4 - 2y \\ \boldsymbol{-12 - 6y} - 2y = 12 \end{cases}$$

On isole l'inconnue :

$$\begin{cases} x = -4 - 2y \\ -6y - 2y = 12 + \boldsymbol{12} \end{cases}$$

On réduit chaque membre :

$$\begin{cases} x = -4 - 2y \\ \boldsymbol{-8}\,y = \boldsymbol{24} \end{cases}$$

On résout :

$$\begin{cases} x = -4 - 2y \\ \boldsymbol{y} = \dfrac{24}{-8} = \boldsymbol{-3} \end{cases}$$

3. On remplace « *l'inconnue désormais connue* » dans la première équation, puis on calcule :

$$\begin{cases} x = -4 - 2 \times \boldsymbol{(-3)} \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ y = -3 \end{cases}$$

La solution de l'équation est le couple (2 ; -3).

RESOLUTION PAR COMBINAISON :
On utilise cette méthode dans tous les autres cas :

Exemple :

$$\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

1. On va éliminer *x* dans le système :
On multiplie chaque équation par un nombre afin de que les coefficients de *x* soient les mêmes :

$$\begin{matrix} \mathbf{3}\times \\ \mathbf{5}\times \end{matrix} \begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

On obtient un nouveau système *équivalent* :

$$\begin{cases} 15x + 12y = -3 \\ 15x - 10y = 5 \end{cases}$$

On **soustrait** « terme à terme » les deux équations, pour éliminer *y* :

$$(-)\downarrow \begin{cases} 15x + 12y = -3 \\ 15x - 10y = 5 \end{cases}$$
$$0x + 22y = -8$$

On obtient une équation du premier degré à une inconnu, qu'on résout :

$$22\text{ y} = -8$$
$$\text{y} = -\frac{8}{22} = -\frac{4}{11}$$

2. On va éliminer *y* dans le système :
On multiplie ce qu'il faut afin de que les coefficients de y soient les mêmes :

$$\begin{matrix} \\ \mathbf{2}\times \end{matrix} \begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

On obtient un nouveau système *équivalent* :

$$\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$$

On **ajoute** « terme à terme » les deux équations, pour éliminer y :

$$\oplus\downarrow \begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$$
$$11x + 0y = 1$$

On obtient une équation du premier degré à une inconnue, qu'on résout :

$$11x = 1$$
$$x = \frac{1}{11}$$

La solution de ce système est $\left(\dfrac{1}{11};\dfrac{-4}{11}\right)$