Correction Cahier de vacances

Calcul numérique

Exercice 1 : les nombres relatifs

Effectuer les calculs suivants.

A = –10 + 12 = 2

B = –3 + 7 + 2 – 8 = 7 + 2 – 3 – 8 = 9 – 11 = -2

C = 5 – (–19) – (+8) – (+6) = 5 + 19 – 8 – 6 = 24 – 14 = 10

D = 31 – 2 × (4 – 17) + 5 = 31 - 2×(-13) + 5 = 31+26+5 = 62

Exercice 2 : décomposition en produit de facteurs premiers

Décomposer chacun de ces nombres en produit de facteurs premiers.

Niveau Apprenti

A = 18 = 2 × 3 × 3 ; B = 75 = 3 × 5 × 5

Niveau Expert

C = 850 = 2 × 5 × 5 × 17 ; D = 132 = 2 × 2 × 3 × 11

Exercice 3 : simplification de fractions

Simplifier chacune de ces fractions pour la rendre irréductible.

Niveau Apprenti

A = $\frac{12}{28} = \frac{4\times3}{4\times7} = \frac{3}{7}$

Niveau Expert

B = $\frac{-12 \times 10 \times 7}{5 \times (-3) \times (-44)} = -\frac{4\times3\times5\times2\times7}{5\times3\times4\times11} = \frac{14}{7}$

C = $\frac{693}{168} = \frac{3\times3\times7\times11}{2\times2\times3\times7} = \frac{33}{4}$

Exercice 4 : calculs enchainés avec des fractions

Effectuer les calculs en écriture fractionnaire et donner les nombres ci-dessous sous forme de fraction irréductible.

Niveau Apprenti

A = $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{3} + \frac{20}{21} = \frac{2\times7}{3\times7} + \frac{20}{21} = \frac{14}{21} + \frac{20}{21} = \frac{34}{21}$

B = $\frac{1}{5} - \frac{7}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5} - \frac{14}{15} = \frac{1\times3}{5\times3} - \frac{14}{15} = \frac{3}{15} - \frac{14}{15} = -\frac{11}{15}$

C = $\frac{4}{9} - \frac{8}{9} : \frac{16}{5} = \frac{4}{9} - \frac{8}{9} \times \frac{5}{16} = \frac{4}{9} - \frac{8\times5}{9\times8\times2} = \frac{4}{9} - \frac{5}{18} = \frac{4\times2}{9\times2} - \frac{5}{18} = \frac{8}{18} - \frac{5}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

D = $\frac{7}{6} - \frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{7\times3}{6\times3} - \frac{5\times2}{9\times2} - \frac{1\times6}{3\times6} = \frac{21}{18} - \frac{10}{18} - \frac{6}{18} = \frac{5}{18}$

Niveau Expert

D = $\frac{\frac{9}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{9}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{3\times3\times4}{5\times3} = \frac{12}{5}$

E = $\frac{\frac{7}{4} - 2}{\frac{5}{4} + 3} = \frac{\frac{7}{4}-\frac{8}{4}}{\frac{5}{4}+\frac{12}{4}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{17}{4}} = -\frac{1}{4} \times \frac{4}{17} = -\frac{1}{17}$

<u>Exercice 5</u> : calculs avec des puissances de 10

Effectuer les calculs et donner le résultat sous la forme d'un nombre décimal **et** d'une écriture scientifique.

Niveau Apprenti

A = $\frac{10^3 \times 10^{-7}}{10^{-5}} = \frac{\frac{10\times10\times10}{10\times10\times10\times10\times10\times10\times10}}{10^{-5}} = \frac{\frac{1}{10\times10\times10\times10}}{10^{-5}} = \frac{1}{10\times10\times10\times10} \times 10^5 = \frac{10\times10\times10\times10\times10}{10\times10\times10\times10} = 10 = 1 \times 10^1$

Pour aller plus rapidement, on peut appliquer les règles suivantes :

Propriété

Si m et n désignent deux nombres entiers relatifs :

$\mathbf{10^m \times 10^n = 10^{m+n}}$ $\qquad \mathbf{\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}}$ $\qquad \mathbf{(10^m)^n = 10^{m\times n}}$

Niveau Expert

B = $\frac{16 \times 10^5 \times 0{,}5 \times 10^{-2}}{20 \times (10^3)^4 \times 10^{-7}} = \frac{16\times0{,}5}{20} \times \frac{10^5\times10^{-2}}{(10^3)^4 \times 10^{-7}} = 0{,}4 \times \frac{10^{5-2}}{10^{3\times4}\times10^{-7}} = 0{,}4 \times \frac{10^3}{10^{12}\times10^{-7}} = 0{,}4 \times \frac{10^3}{10^5} = 0{,}4 \times 10^{-2} = 0{,}004 = 4 \times 10^{-3}$

C = $2 \times 10^2 + 10 + 5 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} = 200 + 10 + 0{,}5 + 0{,}04 = 210{,}54 = 2{,}1054 \times 10^2$

Production d'expressions littérales

Les six figures sont des carrés découpés en quatre rectangles.

- Pour **certaines figures**, des surfaces sont grisées. Dans ce cas, la lettre désigne **l'aire de la partie grisée**.
- Pour **les autres figures**, des segments sont tracés en pointillés. Dans ce cas, la lettre désigne la **somme des longueurs des segments tracés en pointillés**.

Pour chaque figure, il faut exprimer en fonction de a et de b la grandeur désignée par cette lettre.

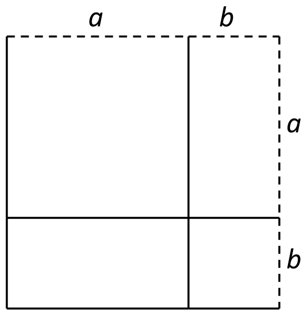
Voici une liste de 15 expressions littérales permettant d'écrire pour chaque figure une ou plusieurs réponses justes :

$b(a+b)$	$2a+b$	$2a+5b$	$4a+2b$	$2(a+b)$
$4a+4b$	a^2+b^2	$a-b$	$(a+b)^2$	$a+b+b$
$4a+5b$	$ab+b^2$	$2(a+b)-b$	$2a+2b$	$4(a+b)$

Attention : certaines expressions proposées ne correspondent à aucune figure.

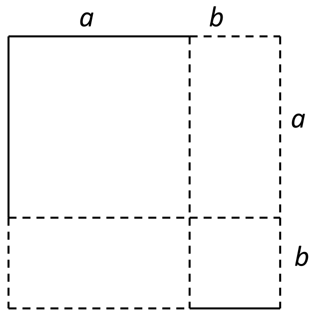
Niveau apprenti : trouver au moins une réponse juste pour chaque figure.

Niveau expert : trouver toutes les réponses justes parmi les 15 expressions proposées ci-dessus.



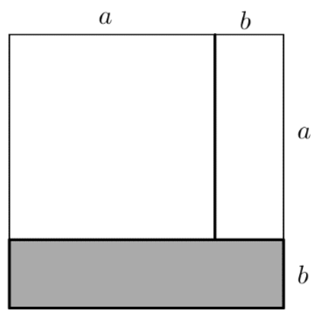
A = $2(a+b) = 2a+2b$

Figure 1



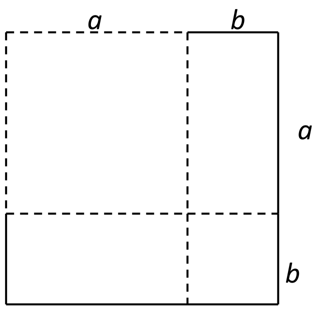
B = $4(a+b) = 4a+4b$

Figure 2



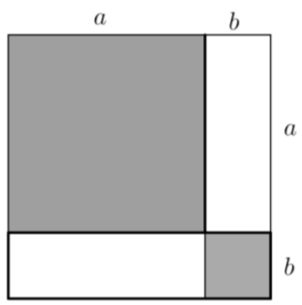
C = $b(a+b) = ab+b^2$

Figure 3



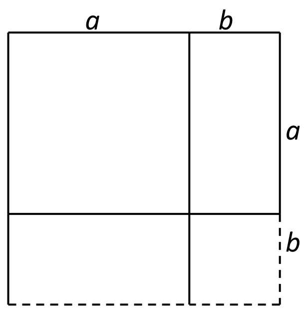
D = $4a+2b$ =

Figure 4



E = a^2+b^2

Figure 5



F = $a+b+b$

Figure 6

Calcul littéral

Exercice 1 : Développer et réduire les expressions suivantes.

Niveau apprenti :

$A = 3(2x - 3) = 3\times 2x - 3\times 3 = 6x - 9$

$B = 2x(3 - 7x) = 2x\times 3 - 2x\times 7x = 6x - 14x^2$

$C = 3(2x + 1) - 3(7 - 2x) = 3\times 2x + 3\times 1 - 3\times 7 - 3\times(-2x) = 6x + 3 - 21 + 6x = 12x - 18$

$D = (3 - 2x)(7 - 4x) = 3\times 7 + 3\times(-4x) - 2x\times 7 - 2x\times(-4x) = 21 - 12x - 14x + 8x^2 = 8x^2 - 26x + 21$

$E = (2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x\times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

$F = (6 - 4x)^2 = 6^2 - 2\times 6\times 4x + (4x)^2 = 36 - 48x + 16x^2$

$G = 2x(3 - 2x) + 3(x - 8) = 2x\times 3 - 2x\times 2x + 3\times x - 3\times 8 = 6x - 4x^2 + 3x - 24 = -4x^2 + 9x - 24$

Niveau expert :

$H = (4x - 7)(2x - 3) - (2x - 3)^2 = 4x\times 2x + 4x\times(-3) - 7\times 2x - 7\times(-3) - [(2x)^2 - 2\times 2x\times 3 + 3^2]$

$= 8x^2 - 12x - 14x + 21 - (4x^2 - 12x + 9) = 8x^2 - 26x + 21 - 4x^2 + 12x - 9 = 4x^2 - 14x + 12$

$I = (6 - x)(6 + x) - (6 - x)(4 - x) = 6\times 6 - x^2 - (6\times 4 + 6\times(-x) - x\times 4 - x\times(-x)$

$= 36 - x^2 - (24 - 6x - 4x + x^2) = 36 - x^2 - (24 - 10x + x^2)$

$= 36 - x^2 - 24 + 10x - x^2 = -2x^2 + 10x + 12$

Exercice 2 : Factoriser et réduire les expressions suivantes.

Niveau apprenti

$A = 6x - x^2 = x\times 6 - x\times x = x(6 - x)$

$B = 9x(x - 3) + 9x(2x + 10) = 9x(x - 3 + 2x + 10) = 9x(3x + 7)$

$C = 4x^2 + 7x = x\times 4x + x\times 7 = x(4x + 7)$

$D = (11x - 3)^2 + (11x - 3)(9x + 5) = (11x - 3)(11x - 3) + (11x - 3)(9x + 5)$

$= (11x - 3)(11x - 3 + 9x + 5) = (11x - 3)(20x + 2)$

On peut encore factoriser $20x + 2$: $20x + 2 = 2\times 10x + 2\times 1 = 2(10x + 1)$

$D = (11x - 3)\times 2(10x + 1) = 2(11x - 3)(10x + 1)$

Niveau expert

$E = (2x + 1)(x + 8) - (3x - 1)(2x + 1) = (2x + 1)(x + 8 - (3x - 1))$

$= (2x + 1)(x + 8 - 3x + 1) = (2x + 1)(-2x + 9)$

$F = x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$

$G = (5x + 1)^2 - 81 = (5x + 1)^2 - 9^2 = (5x + 1 + 9)(5x + 1 - 9) = (5x + 10)(5x - 8)$

$H = 25 - 4x^2 = 5^2 - (2x)^2 = (5 - 2x)(5 + 2x)$

$I = (x + 7)^2 - (4x + 3)^2 = (x + 7 + 4x + 3)(x + 7 - 4x - 3) = (5x + 10)(-3x + 4)$

Exercice 3 : Résoudre les équations suivantes d'inconnues x :

Niveau apprenti

$x - 5 = 3$
$x - 5 + 5 = 3 + 5$
$\boldsymbol{x = 8}$

$5 - x = 0$
$5 - x + x = x$
$\boldsymbol{x = 5}$

$6x = 30$
$\frac{6x}{6} = \frac{30}{6}$
$\boldsymbol{x = 5}$

$1 + 5x = -9$
$1 - 1 + 5x = -9 - 1$
$5x = -10$
$\frac{5x}{5} = -\frac{10}{5}$
$\boldsymbol{x = -2}$

$\frac{x}{3} = 7$
$\frac{x}{3} \times 3 = 7 \times 3$
$\boldsymbol{x = 21}$

$4x - 21 = 7x + 9$
$4x - 7x - 21 = 7x - 7x + 9$
$-3x - 21 = 9$
$-3x - 21 + 21 = 9 + 21$
$-3x = 30$
$\frac{-3x}{-3} = \frac{30}{-3}$ *donc* $\boldsymbol{x = -10}$

$(3x-1)(2x+5)=0$
Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un des deux facteurs est nul

Soit $3x-1=0$
$3x=1$
$\boldsymbol{x=\frac{1}{3}}$

Soit $2x+5=0$
$2x=-5$
$\boldsymbol{x=-\frac{5}{2}}$

Cette équation possède deux solutions $\frac{1}{3}$ *et* $-\frac{5}{2}$

$(4x+3)^2=(4x+3)(4x+3)=0$
Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un des deux facteurs est nul
Or dans ce produit les deux facteurs sont égaux :
On doit donc résoudre : $4x+3=0$
$4x=-3$
$x=-\frac{3}{4}$
Cette équation admet une unique solution $-\frac{3}{4}$

Niveau expert

$$\frac{2x+4}{4}=\frac{x-3}{3}$$

On applique l'égalité des produits en croix : $3(2x+4)=4(x-3)$
On développe et réduit chaque expression de cette égalité : $6x+12=4x-3$
Puis on résout cette équation :
$6x+12=4x-3$
$6x-4x+12=-3$
$2x+12=-3$
$2x=-3-12$
$2x=-15$
$\boldsymbol{x=-\frac{15}{2}}$

$(4x-7)^2=36$
L'équation $y^2=a$ *admet deux solutions* $\sqrt{a}$ *et* $-\sqrt{a}$
Il faut résoudre : $4x-7=6$ *et* $4x-7=-6$

$4x-7=6$
$4x=6+7=13$
$\boldsymbol{x=\frac{13}{4}}$

$4x-7=-6$
$4x=-6+7=1$
$\boldsymbol{x=\frac{1}{4}}$

Cette équation possède deux solutions $\frac{13}{4}$ *et* $\frac{1}{4}$.

$5x^2=2x$
$5x^2-2x=0$
On factorise par x : $x(5x-2)=0$. *On résout l'équation produit nul :*

Soit $x=0$

soit $5x-2=0$
$5x=2$
$\boldsymbol{x=\frac{2}{5}}$

Cette équation possède deux solutions 0 *et* $\frac{2}{5}$.

$$\frac{x}{x+5}=\frac{2}{3}$$

On applique l'égalité des produits en croix :
$3x=2(x+5)$
$3x=2x+10$
$3x-2x=10$
$\boldsymbol{x=10}$

$$2-\frac{x-6}{10}=x$$

Une méthode de résolution, mais ce n'est pas la seule :

$\frac{20}{10}-\frac{x-6}{10}=x$

$\frac{20-x+6}{10}=x$

$\frac{26-x}{10}=x$

$26-x=10x$

$11x=26$ *donc* $\boldsymbol{x=\frac{26}{11}}$

Notion de fonction

Exercice 1 :

Niveau apprenti

1) $a)$ ***Vrai*** : Une fonction affine est de la forme : $x \longmapsto ax + b$
   g est une fonction affine avec $a = 3$ et $b = 0$

   $b)$ ***Faux** :* $g(x)$ est l'image de x par la fonction g

   $c)$ ***Vrai** :* La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

   $d)$ ***Faux** :* Un point appartenant à la représentation graphique de g a pour coordonnées $(x\,;g(x))$
   $g(9) = 3\times 9 = 27 \neq 3$ donc le point $(9\ ;\ 3)$ n'appartient pas à la représentation graphique de g.

   $e)$ ***Vrai** :* $g(2) = 3\times 2 = 6$

2) $a)$ 4 est l'image de 3 par f ou 3 a pour image 4 par f.
   3 est un antécédent de 4 par f ou 4 a pour antécédent 3 par f.

   4 est l'image de 3 par f ou 3 a pour image 4 par f.
   3 est un antécédent de 4 par f ou 4 a pour antécédent 3 par f.

   $b)$ $g(6) = -5{,}3$
   $f(4{,}2) = 2{,}5$

Niveau expert

On peut affirmer que :
B$(4\ ;\ -1)$ appartient à C_f car $f(4) = -1$.
C$(-2\ ;\ 3)$ appartient à C_f car -2 est un antécédent de 3.
E$(3\ ;\ 3)$ appartient à C_f car 3 est un antécédent de 3.

Exercice 2 : Représentation graphique d'une fonction

a) Par f, l'image de -5 est 5.
   Par f, l'image de +2 est 0.
   Par f, l'image de +6 est 7.

b) Par f, -5 n'a pas d'antécédent.7
   Par f, -3 a pour antécédent 1.
   Par f, 0 possède deux antécédents : -3 et +2

c) Par f, 5 a exactement trois antécédents : -5 ; +4 et +10.